Кипнис Михаил Маркович

Челябинский государственный педагогический университет

МОДЕЛИ СОЦИАЛЬНЫХ ЯВЛЕНИЙ В КОРОТКОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Описаны дискретные модели некоторых социальных явлений: модели динамики популяций, в том числе модель "хищник - жертва", модель военных конфликтов и другие. Новизна изложения в том, что рассматриваются дискретные варианты моделей, которые ранее исследовались на языке дифференциальных уравнений. Это помогает усвоить основные понятия математических моделей лицам с невысокой математической подготовкой.

Ключевые слова: *математическая модель, социальные явления.*

Дисциплины: *математика.*

1. Введение

Автор был поставлен перед задачей прочитать короткий курс математики студентам исторического факультета. Большинству слушателей были бы непонятными упоминания производных и интегралов. Поэтому целесообразно рассматривать дискретные математические модели. В общем не происходит практически никаких концептуальных потерь при переходе от дифференциальных уравнений к дискретным. В дискретном варианте достаточно ясны такие понятия, как начальные условия, траектории системы, стационарные траектории, устойчивость и неустойчивость, сепаратрисы, оптимальные решения. При некотором интеллектуальном напряжении слушатели могут добраться и до понятия детерминированного хаоса. Автор изложил дискретные варианты моделей, упомянутых в работе [1].

2. Модели динамики популяций

2.1. Модель Мальтуса

Изучение динамики популяций естественно начать с модели Мальтуса

$$x_{n+1} = q \cdot x_n \quad (1),$$

где q - некоторое число, большее единицы, а x_n есть численность популяции в n-м году.

В экономической интерпретации x_n - величина вклада в банке в n-м году, а величина q определена процентной ставкой.

Удобно рассмотреть вариант q = 1,03, что соответствует ежегодному 3%-му приросту популяции, а в экономической интерпретации начислению 3% годовых на начальный вклад. Несложные выкладки покажут, что через 24 года величина x_0 удвоится:

$$x_{24} = (1{,}03)^{24} \cdot x_0 = 2{,}032793 \cdot x_0 > 2 \cdot x_0$$

Далее, используя равенство 1992 = 24 · 83, приводим слушателей к выводу, что через 1992 года величина населения возрастет более чем в $2^{83} > 10^{25}$ раз.

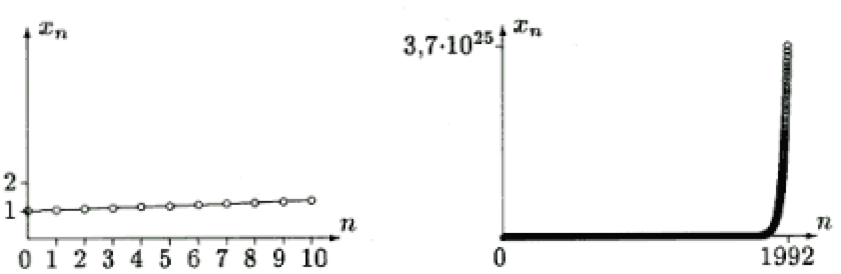

Рис. 1. График роста величины $x_n = (1{,}03)^n$. Слева: при n, меняющемся от 0 до 10. Справа: при n, меняющемся от 0 до 1992, в измененном масштабе по обеим осям.

Итогом обсуждения мальтузианской модели является вывод

гипотеза постоянного в течение двух тысячелетий ежегодного трехпроцентного экономического роста (и, рискнем обобщить, постоянного трехпроцентного роста практически любой величины) опровергается арифметикой.

Эти соображения заставляют прислушаться к аргументам сторонников ограничения экономического роста и качественной диверсификации экономики. Такие идеи высказывались так называемым Римским клубом.

2.2 Логистическая модель

Более реалистической, чем мальтузианская, является логистическая модель

$$x_{n+1} = (a - b \cdot x_n) \cdot x_n \quad (2)$$

Здесь $a > 1$ и b - малое положительное число. Так мы учтем эффект перенаселенности: чем больше xn, тем больше конкуренция за корм и меньше величина $(a - b \cdot x_n)$.

Имеется и экономическая интерпретация модели (2), в которой

x_n может означать объем продаж некоторой корпорации в n-ый период времени;

a - коэффициент, указывающий возможности роста объема продаж при отсутствии конкуренции или насыщения рынка;

b - коэффициент, характеризующий жесткость конкуренции и емкость рынка.

В экономической интерпретации логистическая модель описывает поведение рынка в условиях возможного его насыщения. В этой модели объем продаж стремится к некоторой стационарной величине. Отклонения от стационарной величины гасятся в модели.

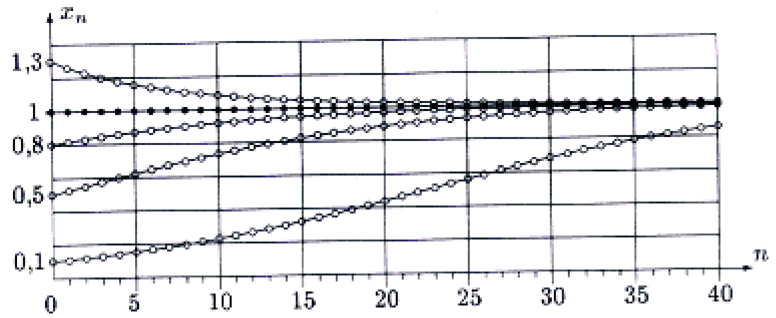

Рис.2. Траектории логистической модели (3) динамики популяции.

Рис. 2. Иллюстрирует устойчивость стационарной траектории

$$x_{стац} = \frac{a-1}{b}$$

в модели

$$x_{n+1} = (1{,}1 - 0{,}1 \cdot x_n) \cdot x_n. \quad (3)$$

При любом начальном условии численность популяции с течением времени приближается к стационарному уровню 1.

2.3. Экспоненциальная модель с отловом

В этой модели не учитывается конкуренция, зато предполагается, что на каждом такте происходит уменьшение численности популяции на фиксированное число. Это фиксированное число мы обозначим посредством c и будем называть квотой отлова. Модель определяется формулой

$$x_{n+1} = a \cdot x_n - c. \quad (4)$$

Будем считать, что а > 1.

Вот возможная экономическая интерпретация модели (4):

x_n может означать доход фирмы в n-ый период времени;

a - коэффициент, демонстрирующий способность работников фирмы увеличивать доход за один период времени ($a > 1$). Конкуренция и насыщение рынка в данной модели не учитываются;

с - постоянные платежи, не зависящие от n и x_n.

На рис. 3 отображены результаты расчета нескольких траекторий (x_n) по формуле

$$x_{n+1} = 1.1 \cdot x_n - 0{,}06 \quad (5)$$

при изменении n от 0 до 30.

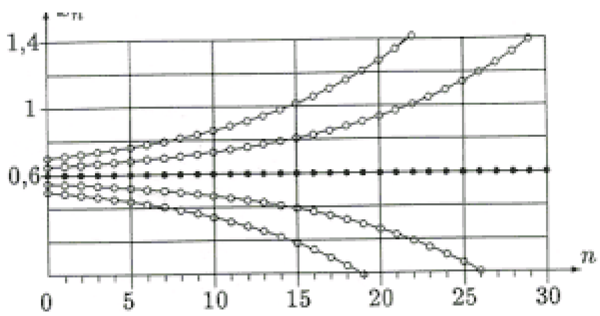

Рис. 3. Динамика популяции в экспоненциальной модели с отловом (5).

Стационарная траектория

$$x_{стац} = \frac{c}{a-1} \quad (6)$$

в модели (4) является критической: падение популяции ниже этой величины влечет ее гибель.

В экономической интерпретации это означает, что существует некоторое критическое значение начального дохода. Если начальный доход фирмы превышает критическое значение, то доход в дальнейшем неограниченно растет. Если же начальный доход меньше критического, то в дальнейшем доход сокращается до нуля.

Формула (6) показывает, что критическое значение дохода зависит от уровня постоянных платежей: при больших платежах критический уровень дохода возрастает до опасно высокого уровня, при малых - фирме требуется небольшой начальный доход, чтобы выжить на рынке. Естественно, формула (6) демонстрирует, что эффективность работы фирмы, символизированная в коэффициенте a, также влияет на величину критической величины дохода.

Мы предлагаем слушателям две задачи о поведении модели (4).

Задача № 1. В водоеме 1 млн. рыб, и каждый год популяция рыб увеличивается на 10% от численности прошлого года. Какова должна быть ежегодная квота отлова, чтобы популяция не погибла?

Задача № 2. Персонал фирмы способен увеличивать доход фирмы ежегодно на 10% от уровня прошлого года. Ежегодные платежи фирмы равны миллиону рублей. Каков должен быть начальный доход фирмы для ее безопасной деятельности?

2.4. Логистическая модель с отловом

Эта модель синтезирует две предыдущие, она и учитывает конкуренцию, и предполагает регулярный отлов. Модель определяется формулой

$$x_{n+1} = (a - b \cdot x_n) \cdot x_n - c. \quad (7)$$

Экономическая интерпретация модели (7) также синтезирует экономические легенды двух предыдущих моделей: она описывает поведение фирмы или группы фирм в условиях возможного насыщения рынка и при наличии постоянных платежей, не зависящих от времени, дохода или капитала фирм.

На рис. 4 отображены результаты расчета нескольких траекторий (x_n) по формуле

$$x_{n+1} = (1,1 - 0,1 \cdot x_n) \cdot x_n - 0,02. \quad (8)$$

при изменении n от 0 до 40.

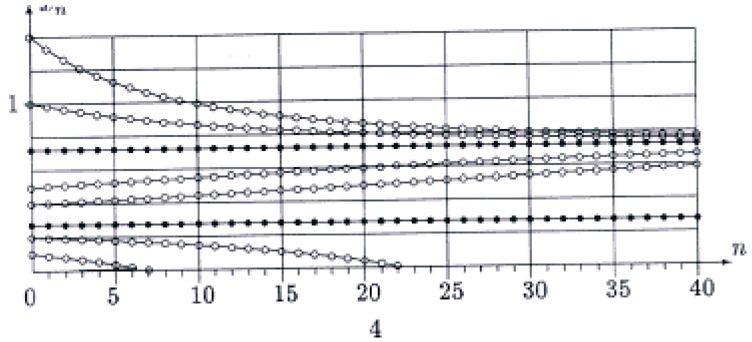

Рис. 4. Траектория логистической модели с умеренным отловом (8).

Имеется один устойчивый стационарный уровень (x = 0,72360) и один неустойчивый (x = 0,27639). Каждая траектория с начальным условием x_0 > 0,2764 с течением времени приближается к устойчивому стационарному уровню. Любое начальное условие x_0 < 0,2763 ведет к гибели популяции.

Модель (7) при малых значениях квоты имеет два стационарных состояния

$$x_{стац1} = \frac{a-1+\sqrt{(a-1)^2-4\cdot b\cdot c}}{2\cdot b}$$ (устойчивый уровень)

$$x_{стац2} = \frac{a-1-\sqrt{(a-1)^2-4\cdot b\cdot c}}{2\cdot b}$$ (неустойчивый уровень)

Если в этих формулах положить

$$c = \frac{(a-1)^2}{4\cdot b}$$

то корни $x_{стац1}$ и $x_{стац2}$ сольются. Некоторые траектории модели (7) в этом критическом случае изображены на рис. 5. Здесь a = 1,1; b = 0,1; c = 0,025. Квота отлова с здесь достигла наибольшего уровня, при котором еще теоретически возможно длительное выживание популяции. Но академик В.И. Арнольд назвал эту ситуацию так: ?оптимизация как путь к катастрофе?. Действительно, как показано на рисунке 5, если численность популяции оказалась выше единственного стационарного уровня, то теоретически она и остается выше него сколь угодно долго. Но если в силу какого-либо ?внемодельного? фактора (замора рыбы, очень холодной зимы в лесу, браконьерства) численность популяции окажется чуть ниже стационарного уровня, то, как видно на рис. 5, популяция гибнет.

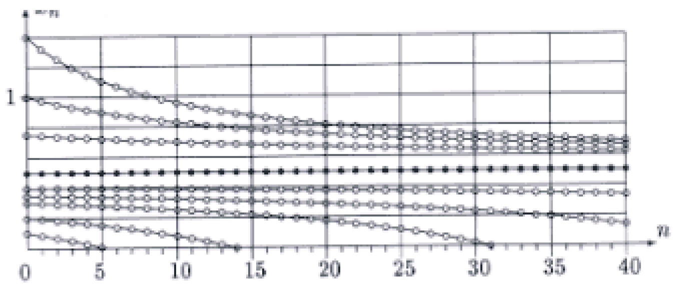

Рис. 5. Траектории логистической модели (7) при $a = 1{,}1$; $b = 0{,}1$; $c = 0{,}025$. Критический случай. "Оптимизация как путь к катастрофе".

И, наконец, если значение квоты вылова c станет больше критического уровня, когда выполняется неравенство

$$c > \frac{(a-1)^2}{4 \cdot b}, \quad (10)$$

популяцию ждет гибель при любых начальных условиях.

Это следует из того, что при условии (10) уравнение для поиска стационарных значений модели (7) имеет отрицательный дискриминант и поэтому не имеет действительных корней. Ситуация *перелова* иллюстрируется рисунком 6, на котором показаны некоторые траектории модели

$x_{n+1} = (1{,}1 - 0{,}1 \cdot x_n) \cdot x_n - 0{,}03$ (11)

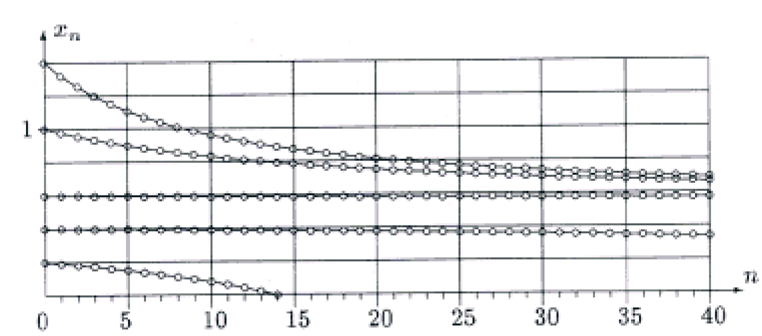

Рис. 6. Траектории логистической модели (7) при a = 1,1; b = 0,1; c = 0,03. Перелов. При любых начальных условиях популяция гибнет.

То, что в модели динамики популяции мы назвали переловом, в экономической интерпретации может означать разорение субъекта хозяйствования под бременем постоянных платежей c, не соразмерных с его динамичностью и с жесткостью условий рынка, которые характеризуются в формуле (7) коэффициентами a и b соответственно. Это разорение является универсальным явлением: лучшие начальные условия (высокие траектории на рис.6) только замедляют, но не отменяют его.

2.5. Мягкая логистическая модель с отловом

Рассмотрим вариант логистической модели (7), к котором "квота отлова" c является переменной и зависит от величины популяции. В формуле (7) положим $c = k \cdot x$ и получим модель

$$x_{n+1} = (a - b \cdot x_n) \cdot x_n - k \cdot x_n. \quad (12)$$

Формула (12) может быть упрощена так: $x_{n+1} = ((a - k) - b \cdot x_n) \cdot x_n$. Но мы предпочитаем форму (12), ибо нам удобно отделить коэффициент k, назначаемый административно, от коэффициента a, который может быть определен приближенно.

Мы ожидаем, что поведение модели (12) будет лучше поведения модели (7) из-за фактического введения в (12) *обратной связи*: в процессе управления (назначения квоты отлова) учитывается текущее значение управляемой величины (в данном случае численности популяции x_n).

И действительно, численные эксперименты, отраженные на рис. 7, показывают, что в модели

$$x_{n+1} = (1{,}1 - 0{,}1 \cdot x_n) \cdot x_n - 0{,}05 \cdot x_n \quad (13)$$

в стационарном состоянии отлов равен 0,025; он равен отлову в модели (8) при a = 1,1; b = 0,1; c= 0,025, т.е. в критическом случае. Но в модели (12), в отличие от модели (8), отсутствует опасность гибели при малых сбоях.

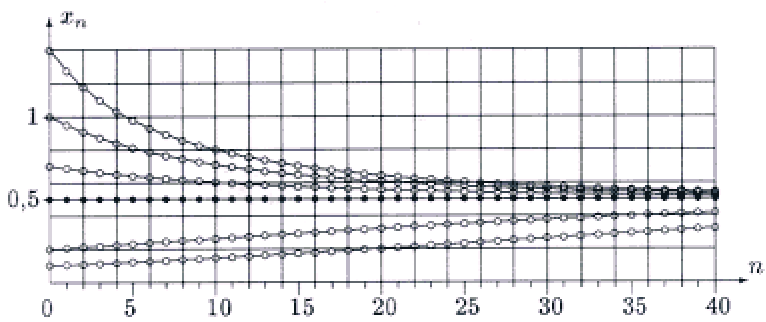

Рис. 7. Траектории мягкой логистической модели (13). При любых начальных условиях численность популяции приближается к стационарной.

2.6. Логистическая модель Лотке-Вольтерра "хищник - жертва" с отловом

Эта тема в курсе математики следует за темой "логистическая модель Лотке-Вольтерра без отлова".

Мы моделируем взаимодействие двух популяций, одну из которых мы называем хищником, другую - жертвой. Примерами могут быть зайцы и волки, щуки и караси, бандиты и законопослушные граждане.

Посредством x_n обозначим численность популяции жертв на n-ом такте наблюдений, посредством y_n - численность популяции хищников. Логистическая модель Лотке-Вольтерра ?хищник - жертва? с отловом есть система двух равенств

$$\begin{cases} x_{n+1} = (a - e \cdot x_n) \cdot x_n - c \cdot x_n \cdot y_n - g \\ y_{n+1}=b \cdot y_n + d \cdot x_n \cdot y_n \end{cases} \qquad (14)$$

Здесь коэффициенты a, b, c, d, e играют следующие роли:

a указывает, как растет популяция жертв, когда нет ни хищников, ни конкуренции. Естественно, a > 1.

b указывает, как уменьшается популяция хищников в отсутствие жертв. Разумеется, b > 1.

c характеризует возможность гибели жертвы при встрече с хищниками. Количество встреч жертв с хищниками можно считать пропорциональной произведению собственно количеств жертв и хищников. Поэтому величина $c \cdot x_n \cdot y_n$ в первом из уравнений (14) оценивает число потерь жертв за один такт наблюдений.

d характеризует возможность поста популяции хищников за счет их взаимодействия с жертвами.

e характеризует жесткость конкуренции жертв между собой

g есть квота отлова ?жертв? за один такт.

Рассмотрим сначала модель с умеренным отловом

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1{,}18 - 0{,}05 \cdot x_n) \cdot x_n - 0{,}1 \cdot x_n \cdot y_n - 0{,}03 \\ y_{n+1} = 0{,}9 \cdot y_n + 0{,}1 \cdot x_n \cdot y_n \end{cases} \qquad (15)$$

Мы подобрали коэффициенты модели так, чтобы, во-первых, отлов был умеренным, и, во-вторых, чтобы у системы (15) было удобное стационарное решение x =1, y = 1. Картина траекторий системы (15) показана на рис. 8. Траектории, недалекие от равновесной стационарной траектории, приближаются к стационарной. В этой модели стационарная точка x =1, y =1 *устойчивая*. Эффект отлова сказывается в модели на некоторых траекториях, далеких от стационарной. Например, на рис. 8 траектория с начальным условием x = 0,4; y = 2 (мало карасей, много щук) не стремится к стационарной, а заканчивается на оси 0_x. Она отражает ситуацию полного истребления жертв, после чего модель становится неадекватной.

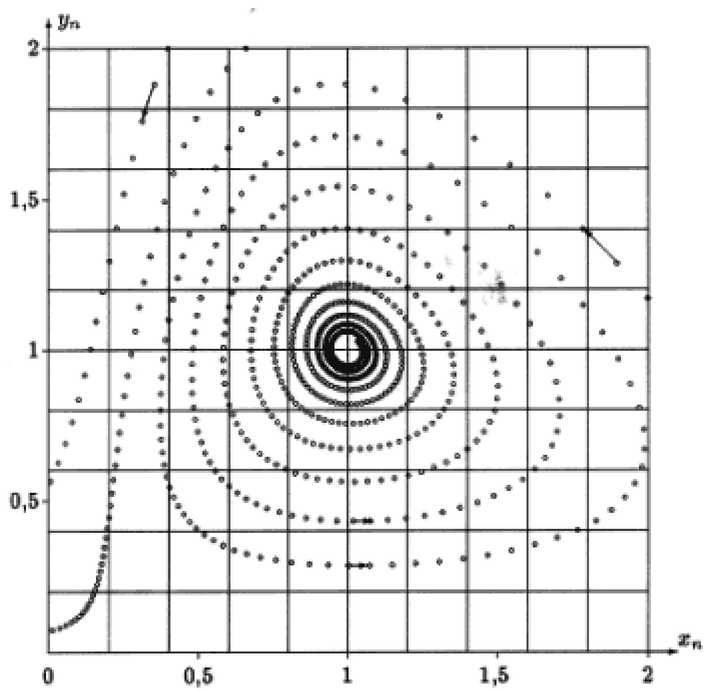

Рис. 8. Траектории в логистической модели Лотке - Вольтерра (15) "хищник - жертва" с умеренным отловом.

Далее мы демонстрируем картину траекторий системы (14) при неумеренном отлове. Рассматриваем систему

{ $x_{n+1} = (1{,}22 - 0{,}05 \cdot x_n) \cdot x_n - 0{,}1 \cdot x_n \cdot y_n - 0{,}07$

$y_{n+1} = 0{,}9 \cdot y_n + 0{,}1 \cdot x_n \cdot y_n.$

(16)

Коэффициенты в системе (16) мы подобрали, исходя из двух требований: во-первых, отлов должен быть значительным, и, во-вторых, система должна иметь удобное для вычислений стационарное решение x = 1, y = 1.

Картина траекторий этой системы (рис. 9) однообразна: любое, даже очень малое отклонение от стационарной пары численности популяций

x = 1, y = 1 ведет к гибели популяции жертв.

После гибели всех жертв узнать о дальнейшей судьбе популяции хищников в модели нельзя. Дело в том, что при нулевых значениях численности популяции жертв модель дает совершенно не соответствующие реальности результаты.

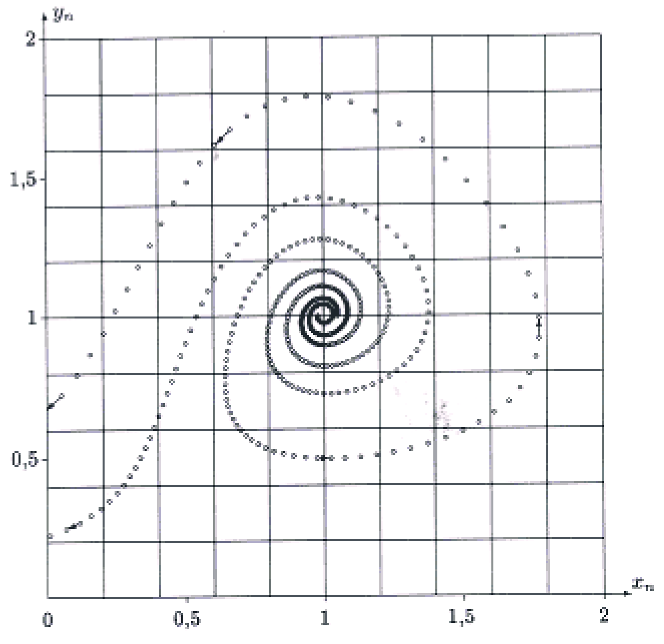

Рис. 9. Траектории в модели "хищник - жертва" (16) с большим отловом. Популяция жертв гибнет при любом отклонении от стационарной пары значений.

3. Другие модели

3.1. Модель военных конфликтов

Пусть численности армий двух противоборствующих сторон на некотором n-ом шаге военного конфликта равны x_n и y_n. На следующем шаге (через год, неделю, день) армии уменьшаются. Рассмотрим грубую схему, в которой за один шаг каждый воин армии x убивает в среднем a воинов армии y, а каждый воин армии y убивает в среднем b воинов армии x. Таким образом, на n-ом шаге армия x теряет $b \cdot y_n$ воинов, армия y теряет $a \cdot x_n$ воинов. Величины a и b характеризуют вооруженность сторон. Так мы получаем модель

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - b \cdot y_n \\ y_{n+1} = y_n - a \cdot x_n. \end{cases} \quad (17)$$

Вначале численности армий x и y равны x_0 и y_0 соответственно. Пара (x_0, y_0) называется *начальным условием*. Совокупность точек (x_n, y_n) назовем *траекторией конфликта*. Конфликт заканчивается, когда либо $x_n \le 0$, но

$y_n > 0$ (победа армии y), либо $y_n \le 0$, но $x_n > 0$ (победа армии x).

Рассмотрим модель, в которой вооруженность армии y вдвое больше вооруженности армии x: в формулах (17) положим $\alpha = 0{,}05$; $\beta = 0{,}1$. Получим модель

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 0{,}1 \cdot y_n \\ y_{n+1} = y_n - 0{,}05 \cdot x_n. \end{cases} \quad (18)$$

Картина траекторий этой системы указана на рис. 10. Мы видим, что существует единственная прямолинейная траектория, заканчивающаяся ?вничью?: она стремится к точке (0,0), символизирующей полное взаимное истребление армий. Конфликт, начавшийся в одной из этих точек прямой, теоретически будет длиться бесконечно. Упомянутая прямая - *сепаратриса* (разделяющая).

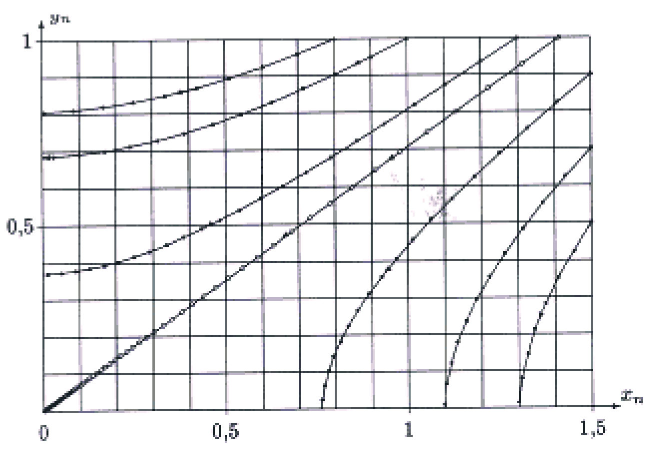

Рис. 10. Траектория в модели военных конфликтов, определенной системой (17).

При любых начальных условиях под сепаратрисой конфликт завершается победой армии *x*; начальные условия над сепаратрисой гарантируют победу армии *y*.

Найдем сепаратрису траекторий модели (17). Для того, чтобы точка (x_n, y_n) лежала на сепаратрисе, требуется, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{yn - \alpha x_n}{xn - \beta y_n} = k.$$

Отсюда

$$k = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Этот результат можно трактовать так:

Если вооруженность армии *y* в *n* раз больше вооруженности армии *x*, то для достижения равновесия численность армии x должна быть в $\sqrt{n}$ раз больше численности армии *y*.

Итак, в этой модели превосходство в численности армии важнее превосходства в вооруженности. Слушателю представляется самому судить о согласованности этой модели с реальными военными конфликтами, давними и современными.

3.2. Модель мобилизации

Модель мобилизации описывает динамику изменения численности организации, вербующей себе сторонников: политических партий или движений, религиозных групп и т.п. Пусть к началу *n*-ого периода существования организации доля ее сторонников в населении равна x_n. Тогда к началу (*n*+1)-го периода:

1. некоторая доля неохваченного населения примкнет к организации вследствие агитации. Доля неохваченного населения равна (1-xn); доля примкнувших равна ¦ · (1-x_n), где ¦ называется *коэффициентом агитируемости*. Величина ¦ находится в интервале от 0 до 1.

2. некоторая доля сторонников отойдет от организации (умрет, разочаруется, будет исключена). Доля отошедших равна *g* · (1- x_n). Число *g* называется *коэффициентом выбытия*. Величина g находится в интервале от 0 до 1.

Таким образом, доля членов организации в начале (*n*+1)-го периода определится формулой

$x_{n+1} = x_n +$ ¦ $\cdot (1-x_n) - g \cdot x_n$,

или

$x_{n+1} = (1 -$ ¦ $- g) \cdot x_n +$ ¦ . (19)

Стационарное значение x величины xn, удовлетворяющее уравнению (19), определяется формулой

$$x = \frac{f}{f + g}.$$

Ввиду неравенств 0 < ¦ < 1, 0 < *g* < 1 величина коэффициента (1 - ¦ - *g*) в уравнении (19) находится в интервале от (-1) до 1. В этих обстоятельствах при любых начальных условиях величина x_n приближается к стационарному значению с ростом n. Но если ¦ + *g* < 1, то x_n приближается к стационарному значению монотонно; если ¦ + *g* > 1, то приближение идет с колебаниями.

На рис. 11 показаны траектории системы вида (19) при коэффициенте агитируемости ¦ , равном 0,04 и коэффициенте выбытия g, равном 0,06. Таким образом, рис. 11 иллюстрирует динамику траекторий уравнения

$x_{n+1} = 0{,}9 \cdot x_n + 0{,}04$. (20)

На рис. 12 показан вариант колебательного приближения величины xn к своему стационарному значению. Для удобства мы построили только одну колебательную траекторию. Здесь коэффициент агитируемости ¦ равен 0,6 и коэффициент выбытия g равен 0,9. Таким образом, рис. 12 иллюстрирует динамику одной из траекторий уравнения

x_{n+1} = -0,5 · x_n + 0,6. (21)

Рисунки 11 и 12 демонстрируют устойчивость стационарной величины в модели и устойчивость модели мобилизации в целом.

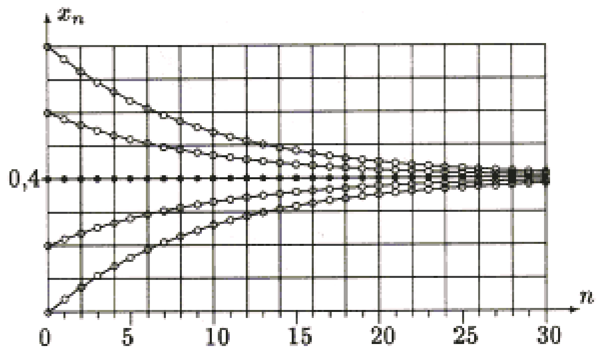

Рис. 11. Модель мобилизации (20). Вариант монотонного приближения к стационарному значению.

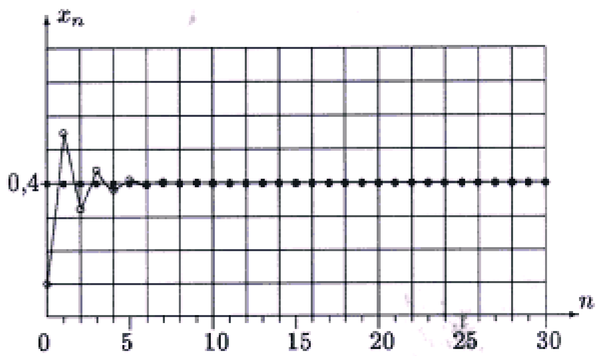

Рис. 12. Модель мобилизации (21). Вариант колебательного приближения к стационарному значению.

Экономически интерпретация модели мобилизации (уравнения (19)) может быть, например, такой: доходы xn+1 в (n + 1) -м году некоторого лица поступают из двух источников. Первый источник - величина ¦ - постоянные поступления, не зависящие от доходов прошлого года (возможно, пенсия или доходы от ценных бумаг).

Наш анализ показывает, что ежегодные доходы в модели со временем приближаются к некоторой величине, не зависящей от начальных условий.

4. Заключение

Кроме изложенных выше тем, в наш короткий курс математики входит очерк теории матричных игр (с иллюстрацией на матрице размером 2×2), который позволяет обогатить словарь слушателя понятием максимина. Мы также излагаем элементарные сведения о линейном программировании.

Наш курс отвечает потребностям специалистов по изучению общества: историков, социологов. Он может быть полезен биологам, поскольку затрагивает проблемы динамики популяций. Для юридических специальностей требуется другой набор тем: возможно, понятие о формальных аксиоматических системах как идеализации реальных правовых систем.

Список литературы

1. В.И. Арнольд "Жесткие" и "мягкие" модели. Доклад на научно-практическом семинаре «Аналитика в государственных учреждениях». М. 1997
2. В. Вольтерра. Математическая теория борьбы за существование. М. 1976.
3. Ю.М. Плотинский. Математическое моделирование динамики социальных процессов. М., Изд-во МГУ. 1992
4. Ф.С. Робертс. Дискретные математические модели с приложениями к социальным и экологическим задачам. М. 1986.