О КУРСЕ "ВВЕДЕНИЕ В СОВРЕМЕННУЮ МАТЕМАТИКУ"

Леонид Давидович Менихес
Южно-Уральский государственный университет
Челябинск

men@math.susu.ac.ru

Описывается курс математики для лингвистов, основанный на рассмотрении конкретных примеров из разных областей математики.

Ключевые слова: математика для гуманитариев.

Дисциплины: математика, методика преподавания.

Главная сложность курса "Введение в современную математику", входящего в программу курса факультета лингвистики, состоит в том, что надо вести разговор о современной математике с людьми, которые имеют весьма малые знания в математике вообще, точнее, знают математику только в объеме школьной программы. Поэтому предлагается следующий метод ознакомления вчерашних школьников с современной математикой. Не рассматривается почти никаких теорий, но курс состоит из рассмотрений примеров из разных областей математики. Такой метод не является новым, см., например, [1], [2]. Основной задачей при данном методе изложения курса является разумный набор примеров, охватывающий разные разделы математики, являющихся интересными и не отпугивающими своей сложностью. Приведем список некоторых примеров и тем, которые рассматривались в курсе.

1. Бесконечность множества простых чисел.
2. Соизмеримые и несоизмеримые отрезки.
3. О возможности построения циркулем и линейкой.
4. О неразрешимости некоторых классических задач на построение: квадратура круга, удвоение куба и т.п.
5. Построение правильных многоугольников. Дебют Гаусса.
6. Комплексные числа. Многочлены. Основная теорема алгебры.
7. Примеры из топологии. Задачи о "блинах" и о "сэндвиче с ветчиной".
8. Элементы теории множеств. Алгебра множеств. Мощность множеств. Элементарные теоремы о счетных множествах. Алгебраические и трансцендентные числа.
9. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Векторное произведение - первый пример неассоциативной операции. Трехмерное пространство с векторным произведением - пример алгебры Ли.

10. Аксиоматический метод в математике. Полнота и непротиворечивость. Аксиомы Пеано. Понятие о теоремах Геделя.

В качестве примера приведем в сокращенном виде изложение некоторых моментов в 6, 7 и 10 вопросах.

Изложение операций над комплексными числами довольно стандартно и доведено до формулы Муавра и извлечения корней. Интерес должен представлять круг вопросов, связанных с основной теоремой алгебры и тот факт, что она приводится с доказательством. Для этого рассматривается топологическое понятие - индекс точки относительно контура.

Пусть дан контур l точка А на плоскости, не лежащая на контуре. Тогда определено целое число $Jnd_l\, A$, которое равно числу оборотов контура вокруг точки А против часовой стрелки.

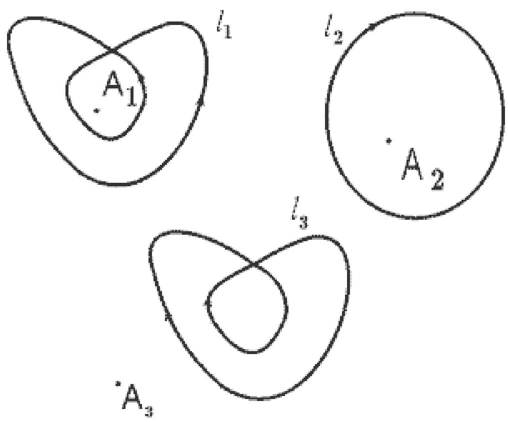

Рис.1

Например, на рис. 1 индексы точек равны $Jnd_{l_1}A_1 = 2; Jnd_{l_2}A_2 = -1; Jnd_{l_3}A_3 = 0.$. Интуитивно совершенно ясно следующее свойство индекса: если контур непрерывно деформируется, не проходя через данную точку, то индекс не меняется.

<u>Теорема 1</u>. (Основная теорема алгебры.) В поле комплексных чисел любой многочлен ненулевой степени имеет корень.

<u>Доказательство</u>. Пусть дан многочлен ненулевой степени

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n.$$

Можно считать, что $a_n \neq 0,$ так как в противном случае многочлен имеет корень $z = 0.$

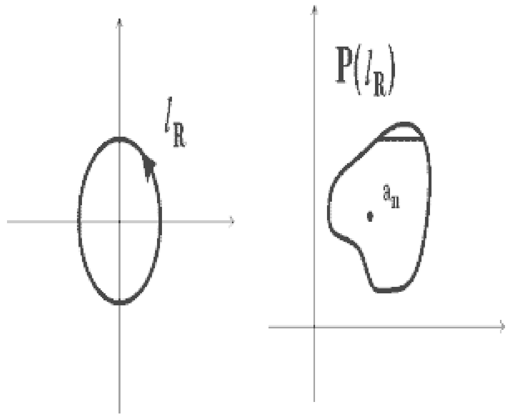

Рис.2

Обозначим через l_R окружность радиуса R с центром в начале координат, проходящую против часовой стрелки. Тогда $p(l_R)$ - некоторый контур на плоскости. Ясно, что при малых R контур $p(l_R)$ - малый контур вокруг точки a_n.

Значит, $Jnd_{p(l_R)}O = 0$ для малых R. Покажем, что найдется достаточно большое R_1 такое, что $Jnd_{p(l_R)}O \neq 0$. Это будет достаточно для доказательства теоремы, так как если бы при изменении числа R от нуля до R_1 контур $p(l_R)$ не проходил через 0, то индекс не мог бы измениться и равнялся бы 0. Значит, при некотором R контур $p(l_R)$ прошел через 0, т.е. существует корень уравнения $p(z)=0$.

Если к точкам окружности l_R применить отображение $w=z^n$, то l_R перейдет в некоторый контур, который мы обозначим $z^n(l_R)$. Ясно, что $Jnd_{z^n(l_R)}O = n.$. Покажем, что можно выбрать достаточно большое число R_1 так, чтобы $Jnd_{p(l_{R_1})}O = Jnd_{z^n(l_{R_1})}O.$.

Пусть при $a \in [0;1]$

$$p(z,\lambda) = z^n + \lambda\left(a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n\right)$$

Тогда $p(z,0)=z^n$ и $p(z,1)=p(z)$. Ясно, что можно выбрать такое большое число R_1, чтобы при $\lambda \in [0;1]$ контур $p(l_{R_1},\lambda)$ не проходил через O. Следовательно, мы имеем при $\lambda \in [0;1]$ непрерывную деформацию контура $p(l_{R_1},0) = z^n(l_{R_1})$ в контур $p(l_{R_1})$, т.е. $Jnd_{z^n(l_{R_1})}O = Jnd_{p(l_{R_1})}O.$. Теорема доказана.

При обучении математике сложилась такая ситуация, когда часто "доказываются" совершенно очевидные вещи. На мой взгляд, это является не только неправильным, но и вредным, так как влечет за собой не только непонимание математики, но и ее активное неприятие.

Здесь я приведу пример другого рода, так называемую "задачу о блинах", в которой логическими рассуждениями относительно несложно доказывается некоторое утверждение: являющееся совершенно неочевидным, даже вначале кажущееся невероятным. Надеюсь, что на этом примере читатель сможет ощутить очарование математики.

При рассмотрении "задачи о блинах" мы будем прямо и честно считать очевидные вещи очевидными и не будем обращать внимание на мелочные наставления педантов.

Итак, пусть на тарелке лежат два блина произвольной формы. Нужно показать, что одним взмахом ножа их можно разрезать ровно пополам, т.е. провести один разрез и каждый из блинов разделится ровно пополам.

Вначале рассмотрим вспомогательное утверждение.

Лемма 1.

Всякое непрерывное отображение окружности S^1 в прямую R переводит некоторую пару диаметрально противоположных точек в одну точку.

Доказательство. *Для $x \in S^1$ обозначим через x' диаметрально противоположную точку. Пусть $f\colon S^1 \to R$ - непрерывное отображение. Определим новую функцию $h\colon S^1 \to R$ формулой $h(x) = f(x) - f(x')$. Очевидно, что h тоже непрерывная функция.*

Возьмем произвольную точку $x_0 \in S^1$. Если $h(x_0) = 0$, то доказательство окончено. Пусть $h(x_0) \neq 0$. Тогда $h(x'_0) = -h(x_0)$ и, следовательно, $h(x_0)$ и $h(x')$ - ненулевые числа разных знаков. Отсюда следует, что между x_0 и x'_0 на окружности найдется такая точка y, что $h(y) = 0$. Доказательство окончено.

Приведем интересную физическую интерпретацию этой леммы.

Следствие. *В каждый момент времени на экваторе земного шара найдется пара антиподальных точек с одинаковой температурой.* Антиподальные точки - это диаметрально противоположные точки.

Теперь перейдем к точной формулировке задачи о блинах.

Теорема 2. *Пусть A и B - две фигуры на плоскости. Тогда существует прямая, которая каждую из этих фигур делит на две части равной площади.*

На первый взгляд эта теорема кажется невероятной. Представляется очевидным, что для того, чтобы две фигуры можно было разделить ровно пополам одной прямой, они должны быть расположены специальным образом.

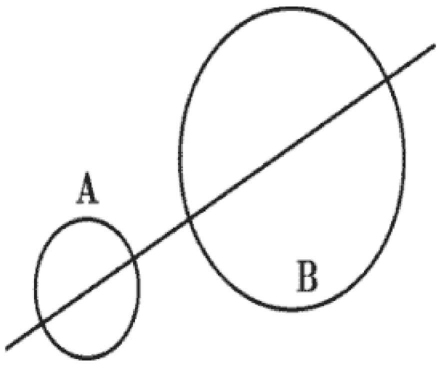

Рис.3

Например, если A и B - круги, то прямую надо провести через их центры (рис. 3). Однако кажется сомнительным, чтобы фигуры на рис. 4 можно было разделить пополам одной прямой.

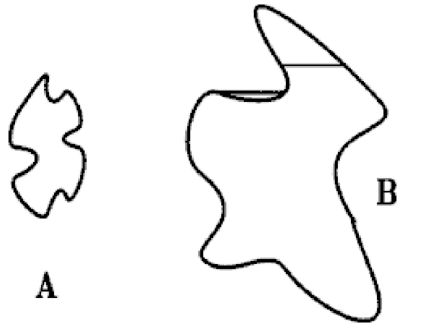

Рис.4

Тем не менее теорема утверждает, что разделить пополам можно всегда.

Доказательство. Пусть S - окружность, которая содержит внутри себя обе фигуры A *и* B. Для любого $x \in S$ рассмотрим диаметр окружности S, проходящий через x. Далее рассмотрим прямые перпендикулярные этому диаметру.

Ясно, что найдется такая прямая, которая делит площадь фигуры A пополам. Обозначим ее расстояние до точки x через $h_A(x)$.

Точно так же определим функцию $h_B(x)$, как расстояние от x до прямой, которая делит пополам площадь фигуры B. Очевидно, что отображения $h_A(x)$ и $h_B(x)$ непрерывны. Теперь определим новую функцию $h(x) = h_A(x) - h_B(x)$. Из рис. 5 ясно, что функция $h(x)$ обладает следующим свойством: $h(x') = -h(x)$ для любого $x \in S$.

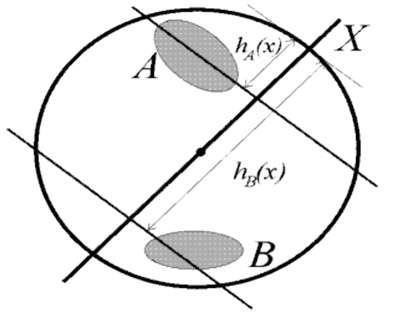

Рис.5

Действительно, $h_A(x') = 2R - h_A(x)$, $h_B(x') = 2R - h_B(x)$, и, следовательно, $h_A(x') = h_B(x') = h_B(x) - h_A(x) = -(h_A(x) - h_B(x))$. Применяя лемму, делаем вывод о существовании точки $y \in S$ такой, что $h(y') = h(y)$. Теперь из соотношений $h(y') = h(y)$ и $h(y') = -h(y)$ следует $h(y) = 0$, т.е. $h_A(y) = h_B(y)$. Последнее равенство означает, что прямая перпендикулярная диаметру, проведенному через точку y на окружность S, и отстоящая от y на расстоянии $h_A(y') = h_B(y)$ делит площади обеих фигур A и B пополам. Теорема доказана.

Что можно сказать, если мы рассматриваем фигуры не на плоскости, а в пространстве?

Здесь существует обобщение задачи о блинах, так называемая теорема о сэндвиче с ветчиной.

Теорема 3. *Пусть A, B и C - три тела в пространстве R^3. Тогда существует плоскость, которая каждое из этих тел делит на две части равного объема.*

Поэтому, если мы имеем сэндвич с ветчиной, который состоит из хлеба, масла и ветчины, то можно одним разрезом ножа разделить его на два сэндвича, в которых будет поровну и хлеба, и масла, и ветчины.

Ясно, что если *A, B* и *C* - шары, то теорема верна. Достаточно провести плоскость через центры этих шаров. Для произвольных *A, B, C* эта теорема кажется еще более невероятной, чем теорема о блинах. Тем не менее она верна. Однако доказательство этой теоремы существенно более сложно, чем теоремы о блинах и было получено совсем недавно, в 30-е годы нашего века. Оказывается, что верна и соответствующая теорема в n - мерном пространстве, но ее доказательство проводится методами, лежащими в центре развития современной топологии. Сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 4.

Пусть $A_1,A_2,...,A_n$? n тел в пространстве R^n. Тогда существует гиперплоскость, которая каждое из этих тел делит на две части равного n-мерного объема.

При доказательстве теоремы о сэндвиче с ветчиной используется лемма, аналогичная рассмотренной выше.

Лемма 2. *Всякое непрерывное отображений сферы S^2 в плоскость R^2 переводит некоторую пару диаметрально противоположных точек в одну точку.*

Однако доказательство этой леммы существенно более сложно.

Здесь также существует физическая интерпретация.

Следствие. *В каждый момент времени на земной поверхности найдется пара антиподальных точек, в которых совпадают и температура и давление.*

Перейдем к краткому изложению 10 вопроса.

Со времен Древней Греции известно, что основой любой науки являются абстрагирование и идеализация, когда некоторые стороны изучаемых явлений сознательно игнорируются. В математике этот метод принимает вид аксиоматического метода, когда те стороны явлений, которые принимаются во внимание тщательно выписываются и запрещается использовать в рассуждениях что-либо кроме записанных утверждений, которые и называются аксиомами. Системы аксиом должны обладать некоторыми свойствами. Во-первых, хорошо если система аксиом является полной, т.е. для любого утверждения, говорящего об объектах рассматриваемой системы, исходя из аксиом можно вывести или это утверждение или его отрицание. Свойство полноты означает, что мы в качестве аксиом взяли все существенные утверждения, ничего не забыли и при развертывании аксиоматической системы сумеем доказать все истинные утверждения. Во-вторых, совершенно необходимо, чтобы система аксиом была непротиворечивой, т.е. чтобы из аксиом нельзя было вывести как некоторое утверждение, так и его отрицание. Полнота и непротиворечивость в некотором смысле тянут в разные стороны: чем больше аксиом в системе, тем более вероятно, что она будет полной, однако, для непротиворечивости более вероятно, если в системе будет аксиом меньше. Таким образом, здесь надо выбрать золотую середину. Мы рассмотрим систему аксиом Пеано для натуральных чисел. В эту систему входят четыре аксиомы, однако известно, что она полна. С непротиворечивостью дело обстоит сложнее: до сих пор неизвестно противоречива или нет система аксиом Пеано. Мы покажем, что если из четырех аксиом Пеано убрать любую, то три оставшиеся уже не будут образовывать полную систему.

Пусть на некотором множестве N задано отношение (x,y) между элементами N, которое мы будем называть так: y следует за x. Пусть также фиксирован некоторый элемент из N, который мы назовем единицей и обозначим через 1. Тогда аксиомы Пеано следующие. (Элементы из N назовем натуральными числами.)

I. Единица 1 не следует ни за каким элементом.

II. Для любого элемента существует и единственный следующий за ним элемент.

III. Для любого элемента существует не более одного элемента, за которым он следует.

IV. (Аксиома индукции.) Если множество натуральных чисел содержит 1 и из того, что оно содержит x следует, что оно содержит следующий за ним элемент y, то это множество совпадает с N.

Ясно, что эти аксиомы истинны для натуральных чисел. Важно, что их оказывается достаточно для вывода всех истинных утверждений о натуральных числах. Однако любых трех аксиом уже не достаточно для этого. Для доказательства мы найдем для любых трех аксиом из аксиом I–IV систему объектов, для которых эти три аксиомы истинны, а оставшаяся ложна. Это и будет означать, что из любых трех аксиом Пеано оставшуюся вывести нельзя, т.е. неполноту системы, состоящую из любых трех аксиом Пеано. Доказательство изложено на рисунке 7. То, что y следует за x, обозначается $x \to y$.

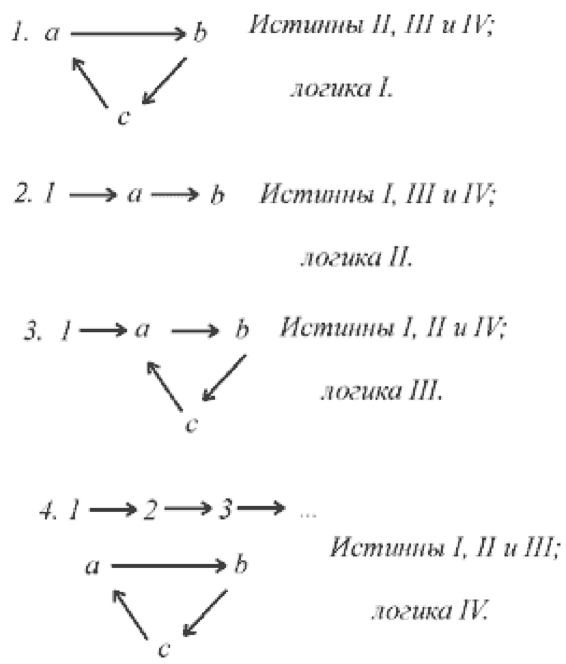

Рис.7

Поговорим в заключение немного о философии. Такой курс должен содержать частые отступления с философским содержанием. Я привожу три обстоятельства, которые способствовали возникновению математики.

I. Абсолютная истина

Вокруг себя в реальном мире человек видит череду сменяющихся явлений и событий, и естественным является желание объяснить все это, создав внутри себя некоторую картину мира. Излишне говорить, что это является несбыточным. Все созданные до сих пор картины мира являются приближенными, неточными. Каждая новая картина мира несколько уточняет предыдущую, но также является неправильной? Где же вывод? Как удовлетворить стремление человека к абсолютной истине, к правде. Один из выходов состоит в религии. Однако, и математика является неплохим делом для искателей абсолютной истины. Теоремы математики являются абсолютной истиной, потому что они говорят об объектах, которых в реальной действительности нет, о вымышленных мысленных конструкциях.

В результате человек обретает покой и уверенность. Эти рассуждения аналогичны словам Шопенгауэра о причинах, которые побуждают человека заниматься наукой и искусством.

II. Стремление заглянуть за горизонт

Познание человека со всех сторон ограничено горизонтом. (Ясно, что здесь имеется в виду не только географическое понятие.) Однако человек любопытен и он имеет естественное стремление заглянуть за горизонт. Математика дает один из инструментов для этого. Математика - единственная вещь, которая позволяет заглянуть за горизонт конечного, как говорил Гильберт, математика - единая симфония бесконечного.

III. Власть

Одним из наиболее сильных стремлений человека является стремление власти. Оказывается, что математика дает для этого неограниченные возможности. Рассмотрим, к примеру, теорему о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке. Можно сказать, что математик запрещает нарисовать такой треугольник, у которого высоты не пересекаются в одной точке. И если приказы мэра распространяются на жителей города, губернатора - на жителей области, президента - на жителей страны и этих приказов можно ослушаться, то приказ математика распространяется на всех жителей планеты (может быть Вселенной) и этого приказа никто и никогда не может ослушаться. Таким образом, математика - неограниченная власть.

Список литературы

1. Кац М., Улам С. Математика и логика. - М.: Мир, 1971. - 250 с.

2. Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. - М., гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1962. - 263 с.