

Клебанов Игорь Иосифович

Челябинский Государственный Педагогический Университет

igor@cspi.urf.ac.ru

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАЗОВОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Аннотация. Обсуждается необходимость разработки спецкурсов и спецсеминаров элементарного уровня, на которых студенты могли бы ознакомиться с методами группового анализа дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, спецсеминар.

Дисциплины: математика, педагогика.

Целью настоящей заметки является привлечение внимания преподавателей, ведущих курсы математического анализа, высшей математики и дифференциальных уравнений, к довольно "странной" ситуации, сложившейся в области преподавания последнего раздела. Практически во всех учебниках, предназначенных не только будущим физикам и инженерам, но и математикам (!), методы интегрирования дифференциальных уравнений преподносятся студентам как набор разнообразных приемов, не имеющих под собой единого теоретического основания. В связи с этим у студентов совершенно естественно возникает вопрос - как догадаться в каждом конкретном случае о нужной подстановке, приводящей к решению, если вся методика интегрирования дифференциальных уравнений зиждется на "догадках" выдающихся умов прошлого. К примеру, во всех учебниках объясняется, что однородное дифференциальное уравнение вида следует решать подстановкой, приводящей к разделению переменных. Но почему именно эта подстановка приводит к цели, не объясняется.

В то же время единый базис методики интегрирования дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и в частных производных) существует уже более 100 лет и более 40 лет успешно применяется в механике сплошных сред, теоретической и математической физике и т.д. Это - групповой анализ дифференциальных уравнений, разработанный Софусом Ли и Эммой Нётер, и развитый в 60-70-е гг. XX века в работах Биркгофа, Олвера [1], Овсянникова [2], Ибрагимова [3] и др. математиков и механиков. Основной идеей группового анализа в области интегрирования дифференциальных уравнений является поиск так называемых непрерывных групп симметрии дифференциального уравнения, то есть непрерывных преобразований зависимых и независимых переменных, оставляющих уравнение

инвариантным. Далее вычисляются комбинации независимых и зависимых переменных, не меняющиеся при групповых преобразованиях - инварианты группы симметрии уравнения, которые выбираются в качестве новых переменных. Такая "процедура" приводит к понижению порядка уравнения, а в некоторых случаях к разделению переменных. С этой точки зрения вопрос об интегрировании однородного уравнения первого порядка решается элементарно. В самом деле, однородное уравнение является инвариантным относительно группы растяжений, а комбинация - инвариант группы растяжений. Аналогичным образом в рамках группового анализа могут быть обоснованы все элементарные методы интегрирования дифференциальных уравнений, а также найдены новые нетривиальные методы.

Поэтому насущной задачей является разработка спецкурсов и спецсеминаров элементарного уровня, на которых студенты могли бы ознакомиться с методами группового анализа. К сожалению, в большинстве вузов России (за исключением ведущих вузов Москвы, Петербурга и Новосибирска) методы группового анализа дифференциальных уравнений широкому кругу студентов, насколько известно автору, не преподаются.

С 1999-2000 учебного года автором проводится спецсеминар по групповому анализу дифференциальных уравнений, рассчитанный на студентов-математиков 8-го семестра обучения. С 1.09.01. к работе семинара привлечены и наиболее успевающие студенты-физики.

Спецсеминар состоит из 2-3 вводных лекций и серии докладов, которые студенты готовят на основе [4] и [5], что способствует активному усвоению материала. Авторская программа спецсеминара, рассчитанная в общей сложности на 28 часов, предлагается вниманию читателей.

1. Группы Ли. Инфинитезимальный оператор. Уравнения Ли. Векторное поле (4 часа).
2. Инварианты групп Ли. Инвариантные уравнения (4 часа).
3. Дифференциальные уравнения как "гиперповерхности" в продолженном пространстве. Формула продолжения для векторного поля. Вычисление симметрий (4 часа).
4. Интегрируемые обыкновенные дифференциальные уравнения с точки зрения теории групп Ли (4 часа).
5. Интегрируемые дифференциальные уравнения в частных производных с точки зрения теории групп Ли (4 часа).
6. Группы Ли и законы сохранения. Теорема Нетер (4 часа).

7. Обобщенные симметрии дифференциальных уравнений. Теорема Ли-Бэклунда(4 часа).

Таким образом, студенты, активно работавшие на семинаре, получают начальную базу, достаточную для самостоятельного анализа интересных их математических моделей, а также для чтения современной научной литературы по соответствующей тематике.

В перспективе планируется не только проведение спецсеминаров, но и чтение систематического спецкурса по групповому анализу дифференциальных уравнений на математическом и физическом факультетах. В идеальном же (по мнению автора) варианте элементарные сведения о групповом анализе должны быть включены и в соответствующие базовые курсы для будущих математиков, физиков и инженеров. К обсуждению этого вопроса я приглашаю всех заинтересованных читателей.

Список литературы

1. *Олвер П.* Применение групп Ли к дифференциальным уравнениям. - М.: Мир, 1989, 680 с.
2. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978 - 400 с.
3. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983 - 280 с.
4. *Ибрагимов Н.Х.* Азбука группового анализа. - М.: Знание, 1989 -48 с.
5. *Шефтель М.Б.* Группы Ли и дифференциальные уравнения: симметрии, законы сохранения и точные решения математических моделей в физике. // ЭЧАЯ, 1997, т.28, вып.3, С.615-685.